

大数の法則とその応用

田口 大

関西大学 システム理工学部 数学科

サマーキャンパス
2024年8月3日, 8月4日

講義の概要

- ▶ 確率論・統計学で広く知られている「大数の法則」について紹介.
 - ▶ サイコロの例で紹介.
 - ▶ 統計学との関連など.
- ▶ 応用として「面積」が計算できることについて紹介.
 - ▶ 円周率の数値計算の例.
- ▶ まとめ・その他.

サイコロ

- ▶ 1 から 6 の目を書かれたサイコロを考える.

各目の出る確率は、それぞれ $\frac{1}{6}$.

- ▶ すごろくのゲームでサイコロを何回振ればゴールできるか？

- ▶ (“折り返し”はないとすれば) 期待値 (平均) を使う.

- ▶ サイコロの出る目の期待値 (平均) は,

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

と計算できる.

サイコロの「大数の法則」

- ▶ 実際にサイコロを 100 回投げてみて、「**出た目の平均**」を考える。
数式で書けば、出た目が例えば、**2, 1, 5, 3, 2, …, 4**であれば、

$$\frac{1}{100}(2 + 1 + 5 + 3 + 2 + \dots + 4)$$

(→ **エクセルの実験**)

- ▶ 一般的に書くと、「**出た目の平均** \bar{x}_n 」は次の式で表される：

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

n ：サイコロを投げた回数， x_k ： k 回目に投げて出た目の値

- ▶ 「**大数の法則**」

- ▶ **出た目の平均** \bar{x}_n がサイコロの**期待値 3.5**に近い値になること。

(→ **エクセルの実験**)

- ▶ サイコロは「均等に」1 から 6 の目を出すのか？

「**偏り**」があるサイコロもある (→ **エクセルの実験**)。

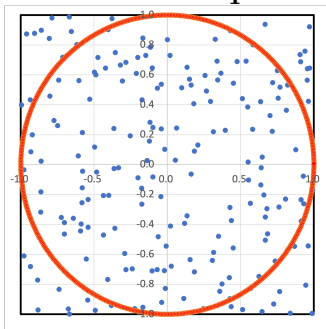
- ▶ 「**偏り**」がなければ、**出た目の平均** \bar{x}_n は 3.5 に近い値になる。
- ▶ 3.5 に近い値でなければ、「**偏り**」があるサイコロの可能性があるので、**多くのデータ**をとることで、**統計学**を用いて「**解析・分析**」。

「大数の法則」の応用：「面積」の数値計算（モンテカルロ法）

- ▶ 一辺 2 の正方形の面積：4，半径 1 の円の面積： $\pi = 3.141592\dots$
- ▶ 一辺 2 の正方形の内部から、「ランダムに」点を選ぶ。
「大数の法則」から、円の内部にある点の「割合」は $\frac{\pi}{4}$ に近い。

- ▶ 数値実験結果：

点の数	π の近似値
10,000	3.137200
100,000	3.140880
1,000,000	3.139392
10,000,000	3.141704
100,000,000	3.141667
1,000,000,000	3.141605
2,000,000,000	3.141597



- ▶ 円周率 π の数値計算は、さまざまな（効率的）方法がある：

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{フーリエ級数})$$

その他：チュドノフスキーの公式（→ Google 2022/6, 100 兆桁）

- ▶ 一方「大数の法則」による方法は、どのような図形でも適用可能！

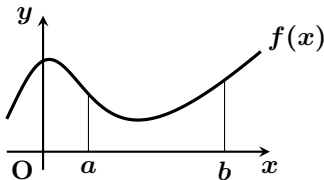
まとめ・その他

- ▶ 「大数の法則」(多くのデータ) + 統計学を用いて「解析・分析」(→ データサイエンティスト)
- ▶ 「大数の法則」によって、「期待値(平均)」を数値計算できる.
- ▶ その応用として、「面積」の数値計算が可能(→ モンテカルロ法).

「大数の法則」による方法は、どのような図形でも適用可能!

→ 関数 $f(x)$ の「積分」

$$\int_a^b f(x) dx$$



の数値計算にも適用可能.

- ▶ モンテカルロ法は「保険会社・金融機関」など多くの分野で利用.(→ 数理ファイナンスの理論, 専門職: アクチュアリー・クオンツ)
- ▶ その他にも確率論・統計学の応用がある.
 - ▶ 株価変動や微粒子の「不規則な運動」の数理モデル(ブラウン運動)
 - ▶ 品質管理, 医学, 薬学, マーケティング, 社会調査, 機械学習...
- ▶ 大学数学は他にもさまざまな分野がある(解析学, 幾何学, 代数学)