

フーリエ級数と音楽

— 音のレシピを数学で読み解く —

関西大学 サマーキャンパス 数学科 模擬講義
システム理工学部 数学科 寺本 央

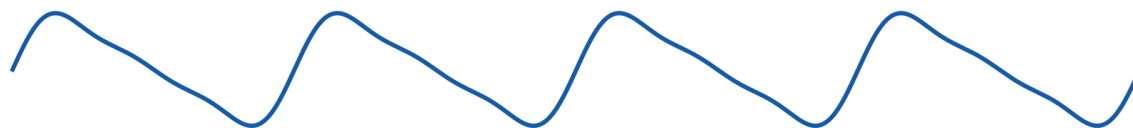
同じ「ラ」なのに…？

ピアノとバイオリンで
同じ高さの「ラ」を弾く。

高さ(440Hz)は
まったく同じ。

**なのに、なぜ
聞き分けられる？**

ピアノの「ラ」 (440 Hz)



バイオリンの「ラ」 (440 Hz)



今日の道すじ

- ① 音の正体は「波」
- ② 音色＝サイン波の足し算（倍音）
- ③ フーリエ級数 — 『どんな波もサインの和』
- ④ 音楽とのつながり（和音・調律・脳の錯覚）
- ⑤ スマホからMRIまで — 現代を支える数学

キーワード：音色とは“サイン波のレシピ”である

スマホの準備 — 「音あそびラボ」を開こう



hiroshi-teramoto.github.io/oto-asobi

- カメラでQRコードを読み取る
- 「タップして はじめる」を押す
- マナーモード（消音）はそのままOK
 - 動画再生と同じ扱いで、消音中でも音が出ます
- 音量は最大に、イヤホンは外す
- 音を出すのは 講師の合図があってから！

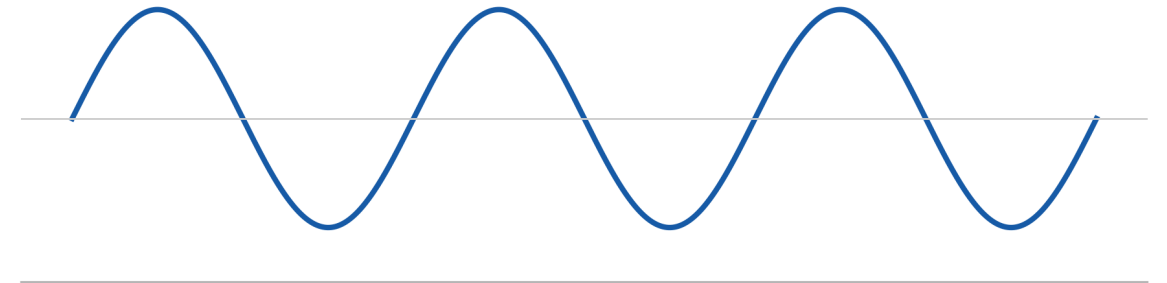
あとで“みんなの実験”に使います

つながらない人は、お隣の画面を一緒に見てもらえばOK

① 音の正体は「波」

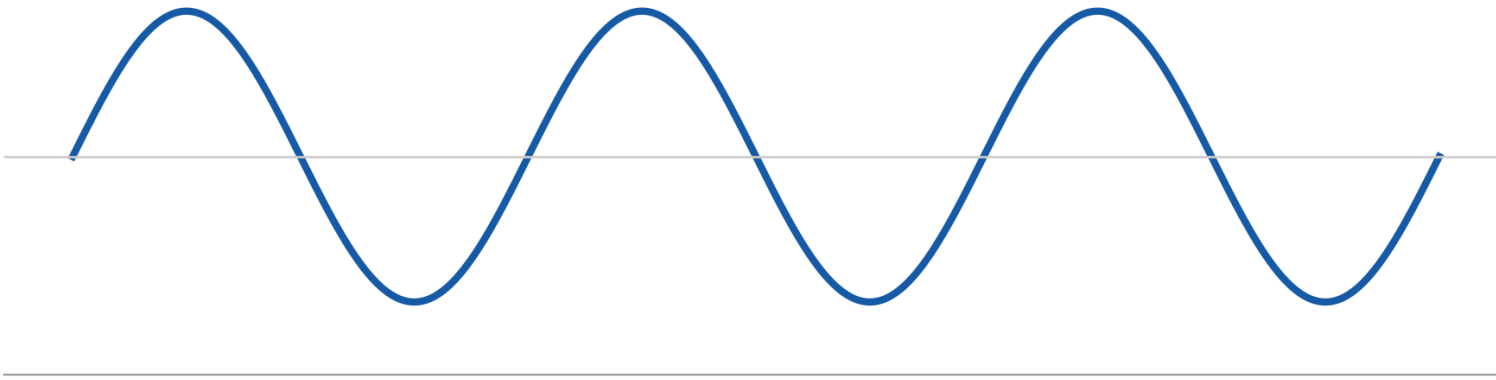
- 音 = 空気の振動（圧力の波）
- マイクでとらえると“波の形”になる
- 振動数（周波数, Hz）= 音の高さ
 - 多いほど高い音／基準は A=440Hz
- 振幅 = 音の大きさ

純音 = サイン波 $y = \sin(2\pi f t)$



最も純粋な波 = サイン波

純音 = サイン波 $y = \sin(2\pi f t)$



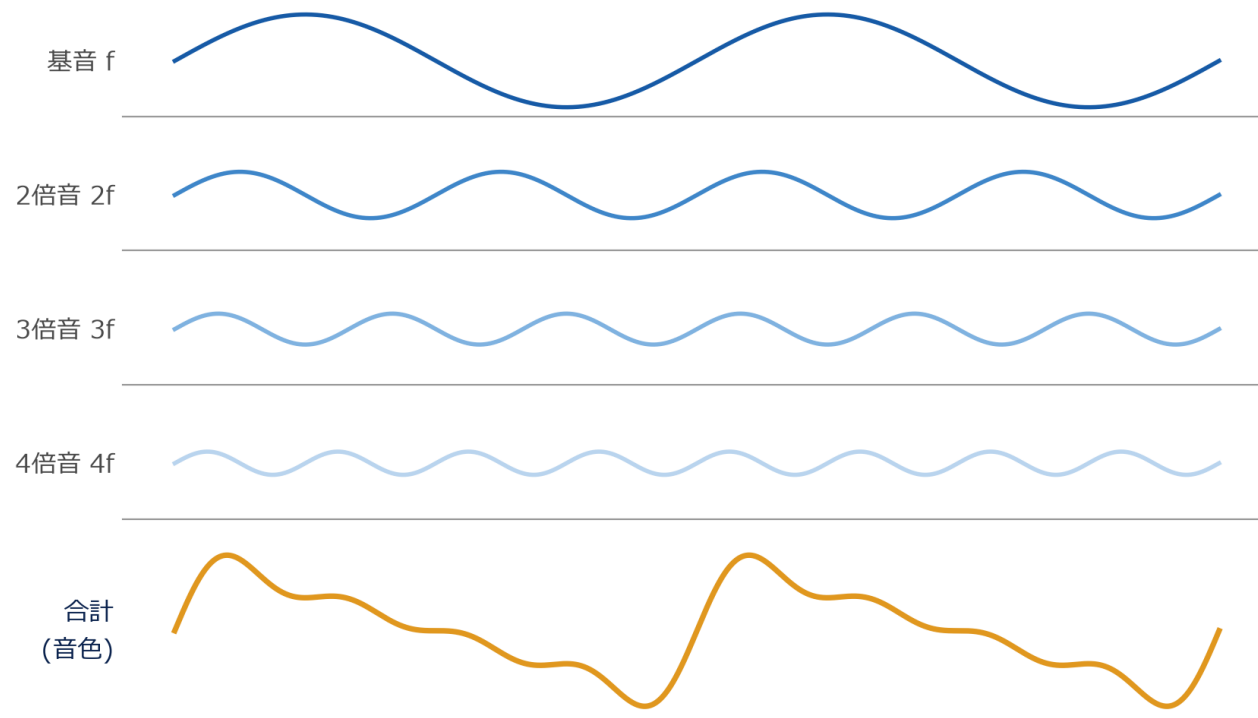
音叉の音が
これ。

すべての音の
“素（もと）”
になります。

② 倍音 — 整数倍の仲間たち

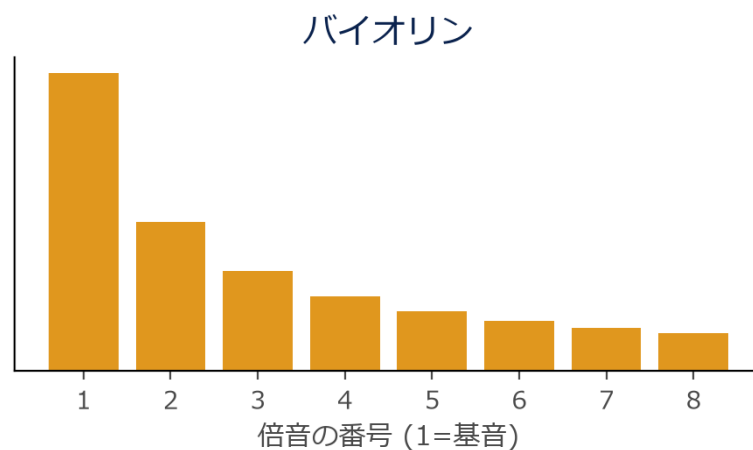
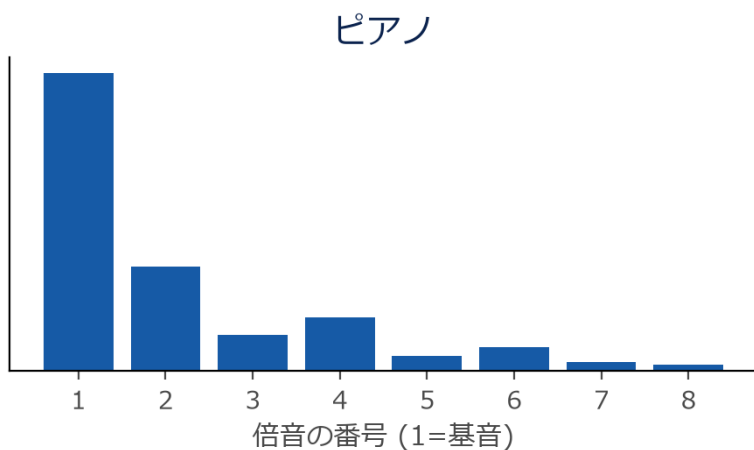
- 基音 f と、その整数倍の音
 - $2f, 3f, 4f, \dots$ = 倍音 (harmonics)
- 楽器の音 = 基音 + 多くの倍音
- 倍音を足すほど波形が変わる →

サイン波(倍音)を足し合わせる → 波形 = 音色ができる



音色 = 倍音の『配合レシピ』

音色 = 倍音の『配合レシピ』



どの倍音を
どれだけ混ぜるか。

その配合の違いが
“音色”の違い。

③ フーリエの大胆な主張

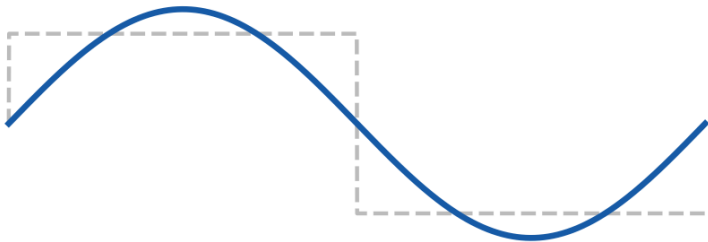
「どんな周期的な波も、
サイン波の足し算で表せる」

- 200年前、フーリエが“熱の伝わり方”の研究で発見
- 当時の数学者は『そんなはずはない』と猛反対
- しかし——正しかった。これが フーリエ級数

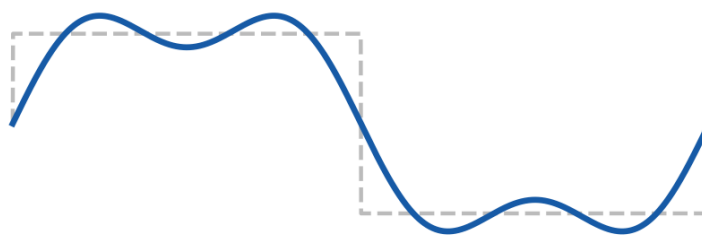
見てみよう：四角い波もサインから

サインを足すほど『四角い波』に近づく (フーリエ級数)

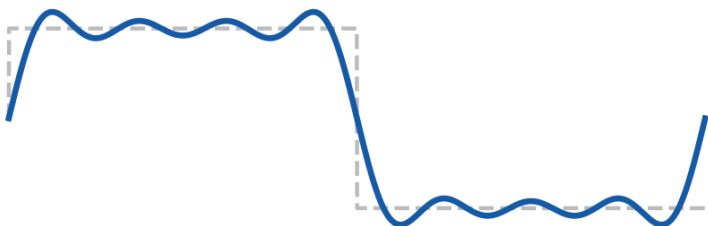
1 項まで



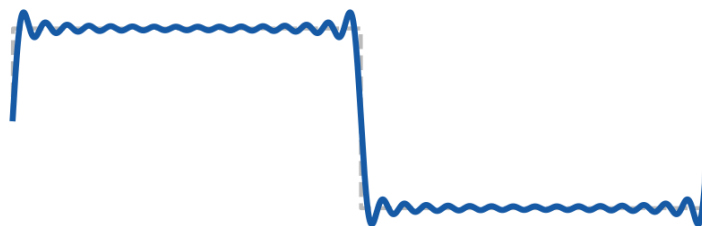
2 項まで



4 項まで



16 項まで



$$(4/n) \times$$

$$(\sin x + \sin 3x / 3 + \sin 5x / 5 + \dots)$$

滑らかなサインだけで
角ばった形まで作れる！

④ 音楽とのつながり

倍音という1つの考えから、音楽の根っこが見えてくる

ハーモニー = きれいな整数比

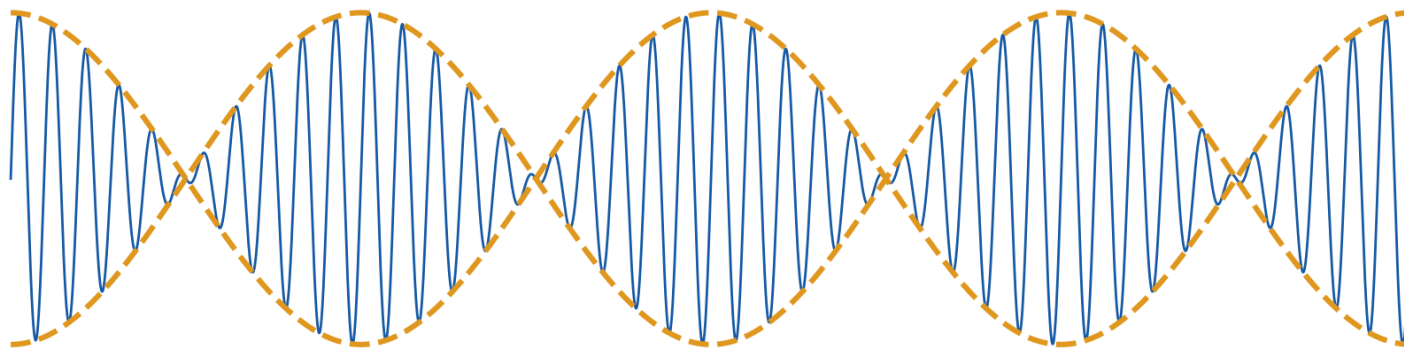
- 倍音列の中に“音楽”が眠っている
- オクターブ = $2 : 1$
- 完全5度 = $3 : 2$
- 長三和音（ドミソ） = $4 : 5 : 6$
- “協和して心地よい” = 単純な整数比

ピタゴラスが
2500年前に
弦の長さの比で
発見していた。



うなり — 調律のしくみ

近い2音を重ねる → 『うなり』(ワーンワーン)



ほぼ同じ高さの
2音を重ねると
強弱が波打つ。

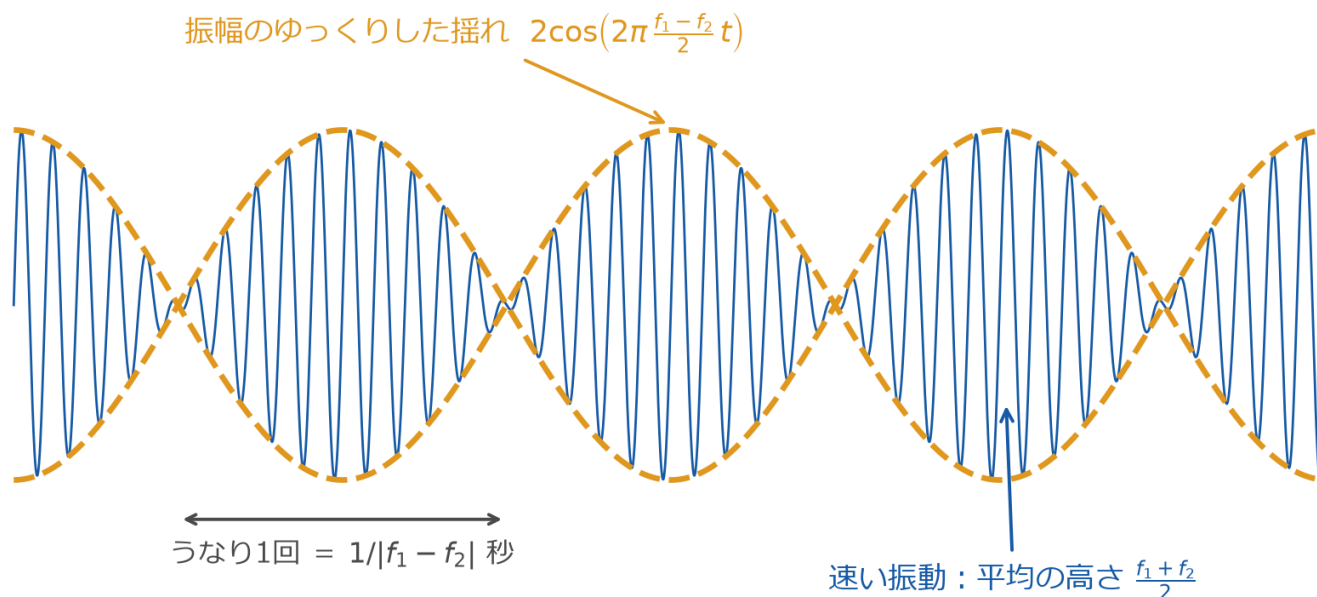
これを消す作業が
“チューニング”。



うなりの正体 — 加法定理で種明かし

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$$

- 加法定理2本を足すと“和積の公式”
 - $\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta) = 2 \sin a \cos \beta$
- 2つの音は 平均の高さ で鳴り続け
- 振幅だけが ゆっくり揺れる
- 揺れ $|\cos|$ の山は 1周期に2回
 - $\rightarrow$ うなりは 毎秒 $|f_1 - f_2|$ 回



さっきの実験と一致！

440Hz + 444Hz $\rightarrow$ 442Hzの音が毎秒4回うねる

平均律 — 数学的“妥協”の芸術

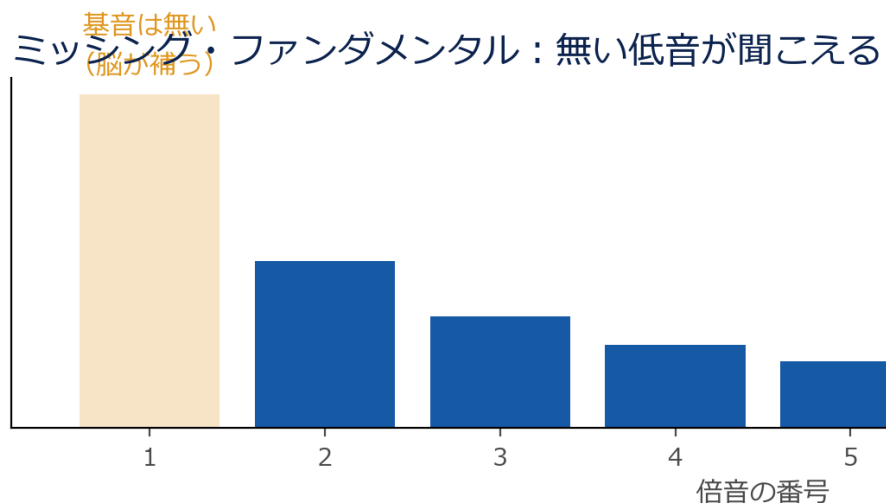
- 整数比だけで積むと1オクターブが閉じない
 - (ピタゴラス・コンマというズレ)
- そこで1オクターブ(2倍)を 12 等分する
- 隣の半音の比を $2^{(1/12)} \approx 1.0595$ に統一
- → どんな調でも演奏できるピアノが完成

無理数

$$12\sqrt[12]{2}$$

が鍵盤に隠れている

脳がだます — ミッシング・ファンダメンタル



基音を消しても
脳が補って
低い音に聞こえる。

小さなスマホで
重低音を感じる
のはこの錯覚！

⑤ スマホからMRIまで

波を周波数に分解する = フーリエ変換は、現代文明の基盤

MP3 / 音楽配信

聞こえない倍音を捨てて圧縮

ノイズキャンセリング

雑音を分析し逆位相をぶつける

JPEG 画像

画像も“波”に分解して圧縮

音声認識・AI

声を周波数成分で聞き分ける

医療 MRI

信号を画像に再構成

通信 5G・地震解析

あらゆる信号処理の中核

まとめ

音色とは、サイン波の“レシピ”。

そのレシピを読み書きする数学が

フーリエ級数。

音楽の美しさの裏には、

整数比・無理数・無限和 という数学が隠れていた。

身近な“当たり前”を分解して仕組みを見つける——

それが大学で学ぶ数学の面白さです。

ご清聴ありがとう
ございました

質問は何でもどうぞ — 関西大学 数学科