

## 数学分野紹介

数学の分野は例えば、アメリカ数学会による分野の分類表によれば、数十の分野がありますが、大きくは純粋数学と応用数学に分けることができます。さらに純粋数学は代数学、幾何学、解析学などに分けることができます。代数学とは大雑把に言って、演算の定義された集合に関することを研究する分野です。幾何学は多様体と呼ばれる空間をいろいろな方法によって研究する分野です。その方法によっていろいろな幾何学の分野が存在します。多様体とは雑に言えば、空間全体としては曲がっていて座標軸を設定できなくても、空間の各点の十分近くでは座標軸を設定できる空間のことです。解析学は関数またその一般化の写像の性質、あるいは関数または写像の集合の位相的性質や他の数学的構造などを研究する分野です。

### [1] 代数学

代数学の代表的な分野として例えば、「整数論」、「群論」、「環論」、「表現論」、「代数幾何学」などがあります。

#### (1) 整数論

整数論の基礎は自然数の性質を調べることであり、『素数の振る舞い』を研究の中心のひとつにしています。整数論は大きく分けて「代数的整数論」と「解析的整数論」があります。整数係数の代数方程式で最高次の係数が1である方程式の解を代数的整数（これは複素数）といいます。代数的整数論はこの代数的整数を調べる学問です。歴史的にはガウスによって証明された平方剰余の相互法則が近代的な整数論の端緒となり、高木貞治の類体論の雛形になりました。類体論は代数的整数論で最も有名かつ重要な理論のひとつです。解析的整数論とは解析学を手段として整数論を研究する分野です。例えば、素数がどのように分布するかという情報を与える有名な素数定理やリーマンのゼータ関数などはこの分野の内容です。またリーマンのゼータ関数をゼロにする複素数はその実部は $\frac{1}{2}$ であろうという予想はリーマン予想と呼ばれ、数学で最も有名な難攻不落の予想問題です。

#### (2) 代数幾何学

代数幾何学は多項式による連立方程式の解全体の様子を調べる学問であり、そんな解全体はひとつの図形で、代数多様体と呼ばれています。多項式の係数をどのような集合からとるかによっていろいろな幾何学が生まれます。一次元の代数多様体（非特異射影多様体）は代数曲線と呼ば

れ,なかでも「楕円曲線」は豊富な内容をもち,活発に研究され整数論とも関係が深く,有名なフェルマーの最終定理の証明でも楕円曲線の理論が本質的に使われています。

### (3) 群論と環論

2行2列の行列(2次の正方行列)で逆行列を持つ行列は,その行列の積も逆行列を持ち,行列の積について結合法則を満たします。また単位行列(積についての単位元)も逆行列をもちます。逆行列を持つ2次の正方行列全体  $GL_2$  は積という演算について逆演算(逆行列をとること)ができます。一般に,集合に結合法則を満たす演算が定義され(もちろん,2つの元の演算の結果もその集合に属するものとする),その演算の逆演算ができて,単位元が存在するとき,その集合は群であるといえます。群の演算が交換の法則を満たすとき(このときの演算を和と呼ぶ),可換群といえます。群は数学全般にわたって頻繁に現れる基本概念である。群論の分野としては,「有限群」(有限集合である群),「代数群」(代数多様体で群になっているもの),ノルウェーの数学者であるリーに創始された「リー群」などがあります。 $GL_2$  は代表的なリー群の例です。環は可換群であって,さらにもうひとつの演算(積という)が定義されて結合法則が満たされ,和と積に関して分配の法則を満たすものです。積が交換の法則を満たすときは,「可換環」といいます。例えば,実数係数の多項式全体は通常のとおり和について可換群であり,さらに通常のとおり積を考えると可換環になります。可換環論は代数幾何学において基本道具として使われます。また2次の正方行列全体  $M_2$  は行列の和について可換群,さらに積も考えると環になります。これは非可換環です。 $M_2$  は 行列  $A, B$  に対して,  $[A, B] = AB - BA$  と定義すると 別の積が定義できます。この積はヤコビ恒等式と呼ばれる関係式をみたし,括弧積といえます。この括弧積で  $M_2$  はリー環と呼ばれるものになります。これはリー群と深く結びついています。リー群が与えられると自然にリー環が得られ,そのリー環の情報からリー群がよく分かる,場合によっては完全にリー群が決まることもあります。

### (4) 表現論

行列の作る群とか環は数学的には非常に分かりやすいものです。「表現論」は抽象的な群や環を行列(または線型作用素)の作る特殊な群や環に対応させることによって群や環,あるいはその対応自身の性質,または構造を知りたい位相ベクトル空間上にリー群を表現してそのベクトル空間の性質を研究する学問です。群や環の代数構造を保存するそんな対応を表現と呼びます。行列は”有限次元”であるが,ヒルベルト空間上の線型

作用素（これは無限次元の行列版）の作る群や環に表現しなければならないことも多く、この場合、位相解析学（または函数解析学）のような無限次元を扱う解析学が必要になります。

## [2] 解析学

解析学の代表的分野としては、例えば「複素解析学（1変数及び他変数）」、「位相解析学」、「関数方程式」、「確率論」、「実解析学（フーリエ解析を含む）」などがあります。

### (1) 複素解析, 多変数複素解析

現代の複素解析に直結する数学は19世紀初頭におけるコーシーの業績から始まると考えてよいでしょうが、例えばガウスは1790年代後半には代数方程式の解が複素数の中に存在することの証明の重要性を認識していましたし、現代でいうところの”正則性”の概念もコーシーよりも以前に把握していました。いずれにしても19世紀の複素解析はその揺籃期であり、楕円関数やゼータ関数などに代表されるように新しい（有理型）関数の提唱とその緒性質の研究に注目が集中していました。リーマンの多様体の概念がこうした関数が繁茂する場として把握されはじめたのは19世紀末期から20世紀初頭にかけてのことで、このころようやく現代の複素解析の研究の基盤がととのったといつてよいでしょう。その一方で、複素多変数の解析関数に関する重要性も20世紀初頭から認識され始めました。その中で特筆されることは、多変数の解析関数の研究には関数個々の性質云々よりも、それらが一斉に解析接続される最大の領域の境界が幾何的な凸性をもつという発見でした。この逆問題は岡潔のその独創的なアイデアによって解かれますが、その重要性を即座に見抜きスタイン多様体上の層係数コホモロジー論として整備したカルタンの理論はセールの論文GAGAやFACといった代数幾何学へも影響を与えます。この流れは小平邦彦や彼自身とスペンサーによる（コンパクト）複素多様体論の構築と相まって現在なお多変数複素解析の主要な分野を構成しています。一方、20世紀の初めワイルによってリーマン面という概念が定着して以来、そのモジュライ（異なる構造をもつリーマン面は一体どれくらいあるか）の問題は第2次大戦中のタイヒミュラーの研究以降、アルフォルス等によりタイヒミュラー空間の理論として強力に進められ、現在では複素力学系、低次元トポロジー、共形場理論、弦理論などの物理学への応用も試みられています。このような多様体論の狭間で、しかしそれと深い連関をもちながら、独自の発展を遂げてきた分野に1920年代にネヴァリナにより創始された正則写像の値分布の理論があります。歴史的には1

9世紀に活躍したリュールまで遡ることができるこの分野は、特に小林昭七による小林双曲性の発見と導入によって値分布論のみならず複素多様体論、タイヒミュラー空間の理論とも絡み合っ大変な進歩を遂げ、複素微分幾何学の中で大変重要な位置を占めるに至っています。

(2) 位相解析学

「位相解析学」は別名「函数解析学」とも呼ばれ、収束の概念を伴う無限次元ベクトル空間とその間の線型写像を研究する学問です。平面ベクトルに対して、ベクトルの和、ベクトルの定数倍が定義できて、それらは再び平面ベクトルになります。平面ベクトルは成分が2個なので、平面ベクトル全体からなる集合は2次元の空間と考えます。もし、成分が無限個のベクトル全体を考えるとこれは無限次元のベクトル空間です。長さ有限の閉区間  $I$  で定義させた連続関数全体  $C(I)$  を考えると、連続関数の和は連続関数、定数倍も連続関数だから、ベクトル空間です。この場合も、次元は無限大です。  $f(x), g(x) \in C(I)$ , 数  $c$  に対して

$$\|f\| = \{ |f(x)| \mid x \in I \} \text{の最大値}$$

と定義すると次の3つの性質を持ちます：

$$\|f\| \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \|f\| = 0 \text{ならば} \quad f(x) = 0 \tag{1}$$

$$\|cf\| = |c| \|f\| \tag{2}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{3}$$

すなわち、数の場合の絶対値と同じ性質を持つことが分かります。この3つの性質をもつ  $\|f\|$  を  $f$  のノルムといいます。関数列  $\{f_n\} \subset C(I)$  が  $f \in C(I)$  に収束することを

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

で定義すると  $C(I)$  に収束の概念を導入できます。こうして  $C(I)$  から  $C(I)$  への函数（正確には写像）に連続性が定義できます。このように関数がベクトルになっているようなベクトル空間に収束の概念が与えられたものを関数空間といいます。位相解析学は、関数空間の性質や関数空間上の線型写像（線型作用素という）の性質を調べる学問です。より一般に、抽象的なベクトル空間にノルムが定義されていて、そのノルムによる収束の概念が完備であると言われる”いい性質”をもつとき、この空間をバナッハ空間といいます。もし内積が定義されたバナッハ空間のノルムがその内

積から与えられるならば, そのベクトル空間はヒルベルト空間と呼ばれます。位相解析学には多くの分野があります。例えば, ひとつの作用素を調べる分野は作用素論, 作用素の作る環を研究する分野は作用素環論とよばれます。またバナッハ空間の性質を調べるバナッハ空間論などがあります。さらに連続群, 特にリー群をヒルベルト空間上の(ユニタリー作用素ような)よい作用素の群に表現して, 群やその表現などを位相解析の理論を使って調べる分野もあります。

### (3) 確率論

ランダムな現象の中に, 根本原理を見出しあるいはそれを仮定し, その原理の下に, 現象の数学的解析を行なう学問を確率論と呼びます。今日, 確率論は数学の一つの分野として発展しているだけでなく, 物理学, 生物学等の自然科学から工学, 社会科学までの幅広い分野でその考え方, 手法が利用されています。近年では, 特に経済学における金融工学への伊藤の確率解析の応用は顕著です。

具体的例でもって確率論の基礎的部分を説明します。表, 裏が同程度に出るコインを一定回数投げるという操作を考えます。表が出る回数を  $X$  とおきます。この  $X$  のように試行の結果によって決まる変数のことを確率変数といいます。確率変数の性質を調べるのが確率論の基本的な問題です。表が出る回数をコインを投げた回数で割った数値をこのコイン投げにおける表が出る経験確率といい, これはコインを投げる回数を増やしていくと  $1/2$  に近づくことが予想されます。実際実験をしてみてください。これを理論的に保証するのが大数の法則です。その経験確率と理論値  $1/2$  の間の誤差の分布に関する 1 つの定理が中心極限定理と呼ばれるものです。これらは古典確率論の代表的な結果です。また, 大偏差の問題といわれるものもあります。これは, まれに起こる事象の研究ともいえるもので, 例えば, 先に述べた大数の法則からはずれているような事象の大きさの研究も含まれます。この研究は, 様々な極限理論に結びついています。さらに, 確率変数に時間的なダイナミクスを加味したのが, 時間変数をパラメーターにする確率変数つまり確率過程です。これは, 現代確率論における最も重要な概念です。具体例としては, 1次元格子, あるいは2次元格子上のランダムウォークがあります。これは, 整数値時間パラメーターの確率過程の典型的な例です。これを一般化したものが離散時間のマルコフ連鎖, 連続時間のマルコフ過程です。これらの確率過程は応用諸分野においてランダムな現象の数学的モデルを与えることも多く大変重要なクラスを形作っています。時間パラメーターが連続で, 確率変数も連

続な値を取る確率過程の最も重要な例はブラウン運動 (Wiener 過程) です。この運動は、植物学者の Brown が水に浮かんだ花粉の運動を観測していて発見した不規則なジグザグ運動に始るとされています。このようにでたらめに変化している様に見える運動に、法則性を見出しそれを解析しようとした努力の過程から厳密な数学的ブラウン運動が定式化されました。伊藤清は、このブラウン運動にもとづく確率積分、確率微分方程式の概念を初めて導入し、さらには確率過程の見本関数の微積分学を確立しました。今日これは伊藤確率解析とよばれ、確率論に直接関係する分野での研究の基本的方法のみならず、幾何学の諸概念と結びつき確率微分幾何学とよばれる研究分野をを生んだり、さらには自然科学、工学などにその動機を持つ確率モデル記述のためにも利用されています。また、ブラウン運動は調和関数などの解析的概念とも深い関係があります。福島正俊は、ポテンシャル論におけるデイリクレ形式と一般の対称マルコフ過程との関係を詳細に研究しました。今日、福島の理論はその生成作用素が特異な係数をも許すマルコフ過程、測度零の集合の研究、フラクタル上の確率過程、無限次元空間上の確率過程等など多方面で利用されています。先に出ました大偏差の問題は、1970年代に Donsker-Varadhan によりマルコフ過程に対する大偏差の問題として系統的な研究が始りました。今日までに多くの研究が積み重ねられてきています。しかしながら、エルゴード的ではないマルコフ過程の場合には困難が多いようです。特に、双曲型の空間上の固定端ブラウン運動の場合は種々の観点から興味深いのですが、通常の大偏差原理と違い、双曲型の空間上の固定端特有の諸量があらわれ、困難なことが多く、得られている結果もごく僅かで、今後の進展が待たれるというのが現状です。上で述べてありますように、確率を含む微積分学が確率解析であり、その最も重要な研究対象は確率過程です。確率過程は、各時刻で、様々な位相空間の値を取る確率変数の集まりですが、時間と空間の各点に確率変数を配置し確率過程を一般化することもできます。この一般化を "確率場" といいます。少々難しい言方ですが、確率過程を常微分方程式に例えれば、確率場は偏微分方程式に対応します。確率場によって表現される自然科学、社会科学の問題は多岐にわたり、このことから、この分野の研究は抽象的な基礎研究のみならず数学の応用分野に興味を持つ諸君にも向いていると思います。数理物理学への幾つかの重要な応用と、一つの未解決問題「相対論的場の量子論の数学的構成」につきましても、あとで少し詳しくのべることにして、その前に、真っ当な社会科学の問題に確率場がどの様に応用できるか簡単に例を挙げてみます。ま

ず、基本的に確率場は、相互に影響しあう多粒子系の確率的な運動を説明する数学であります。従いまして、様々な意見を持った、多くの人々、組織によって構成されている社会での、多数派、少数派の、意見の形成過程や、経済（金融）活動により結び付けられた多数の企業間における収支の連鎖的影響過程等も、多粒子系の運動を説明する確率場の適用対象となります。格子点上または、格子点を結ぶ線分上に値 +1 または 0 をもつ確率変数を配置した確率場をパーコレーションモデルと呼びます、パーコレーションモデルを社会の意見形成過程に適用すると、政治学的に興味深い意味のある結果が導けます。その他、生態系や、人間社会における棲み分け問題などのモデル化、解析にも確率場は極めて有効な数学で、後節の計画数学分野の紹介で述べられるシェリングモデルなども、確率場として定式化、一般化できる興味深い研究対象です。続いて、確率場の解析の数理論物理学への幾つかの応用例を見てみましょう。例えば、鉄が磁界の中で、磁化される物理的仕組みは2種類のスピンを確率的にもつ粒子を格子点上に配置した Ising モデルとよばれる確率場により表現されます。また熱伝導率が異なる複数の物質をランダムに組み合わせて構成された物質の熱伝導の様子を数学的に表現するには、エルゴード理論の応用である確率場の一様化理論を適用します。社会科学への応用であれ、数理論物理学への応用であれ、とても興味深いのは、相互作用を持つ一個ずつの粒子の “ミクロレベル（微視）”での運動、変化を確率場を用いて定式化するところから出発し、時間変数や空間変数のスケールをうまく選んで極限操作（統計力学極限）を行えば、例えば、多次元や無限次元の拡散方程式等の “マクロレベル（巨視）”の運動方程式が得られる点です。

最後に、少々偏った内容ですが、確率場の研究対象の中で未解決の問題の一つ「相対論的場の量子論の数学的構成」について大まかに説明します。この問題の解析には、上でも記述のあります福島正俊のデイリクレ形式と無限次元対称マルコフ過程の理論や、当初から無限次元の確率解析を念頭に開発された、飛田武幸のホワイトノイズ解析（飛田解析）などの大道具を有効に使う必要があります。実は、この問題は1960年当時の最初の設定のままでは、真ともな解決は不可能とも考えられていますが、兎に角、概要を解説してみます。我々の住む宇宙、世界、我々自身も素粒子（光子を含む）が生成消滅を繰り返す時空4次元の宇宙空間全体で定義された場から、それぞれの設定に応じて取り出され、切り取られ、解釈され現出せられた局面であります。数学が、我々の認識方法（力）の正直な“現れ”である限りは、この量子力学と相対論の両方の要請を満たし我々の存在を

保障する場が、数学として、矛盾なく設定されねばなりません。単純化して言えば、これら無限個（非加算無限も含む）の粒子、やその総合として現れる無限自由度をもつ観測対象総てが、互いに、また自分自身とも相互作用、しかも「光」よりも速く伝わることの無い相互作用（特殊相対論）を及ぼし合いながら、各々が量子力学の方程式を満たして運動（変化）する場が設定されねばならないと言うわけです。問題が提起された1960年代初頭の段階で、相互作用を全く持たないならば、このような時空4次元の場（自由場）が数学的に定式化されることが明解に示されました。その一方で、同じ要請を満たしかつ相互作用をもつ場（自由場ではない）は、未だに時空4次元に対し、何一つとして数学的に定式化されておりません、我々の現実世界には、様々な相互作用があるのに。時空4次元では相互作用のある場は「構成できない」に当たる証明もありますが、それは特別な限定的設定の上で行われており、いまのところ、出来る（その様な場は存在する）と証明されておりません。否定的な立場ならば、この要請の下では、数学的には構成不能であることを矛盾なく説明する必要があります。一方で、数学による相対論的場の量子論の肯定的な解析の使命は、相対論的量子場についての我々の認識と現象（同じこと？）を整理して洗い出し、この命題を慎重に設定し、証明可能であることを信じて、その証明を成し遂げることです。Gödelの不完全性定理によれば証明不能命題も存在し得るのですが。

### [3] 幾何学

#### (1) 微分幾何学

幾何学の中でも微分幾何学は実数をパラメーターとしてもつ平面上の曲線の曲率や変局点を調べたりするように、対象を定義する関数の導関数の性質から幾何的な量や対象自身の大域的な性質を導こうとする分野です。さらに誤解を恐れずに簡略化して述べますと、微分幾何学の中の幾つかの主要な問題は、原点を含む半直線上の関数  $f(x)$  で微分不等式  $f''(x) \leq K(x)f(x)$  を満たす解の無限遠での大域的挙動の研究に還元されると言えます。ここで  $K(x)$  はいろいろな幾何的对象が定義されている空間の曲がり具合を表現する曲率関数と理解していただいて結構です。ここで大切なのは関数の定義されている区間が有限閉区間のようなビジュアルな世界ではなく、無限に広がった区間であることです。非コンパクト複素多様体上の層係数コホモロジー、ベクトル束に値をもつ調和形式、調和写像の値分布論、完備リーマン多様体上の計量の共形変形に現れるスカラー曲率の方程式の解、ラプラシアンに関する一般化された最大値原理等々す



べてこの不等式を満たす解の研究と関連があります。等号が成立する場合は比較的容易に  $f(x)$  の挙動を決定することができるのですが、不等号の場合はそう容易ではありません。しかも曲率関数の符号が一定しない場合や滑らかさが損なわれる場合など（ここでは曲率関数が超関数である場合すら含んでいると考えていただいて結構です！それも代数幾何学上の大変高度で複雑な問題に関連しているのです）は問題が非常に微妙な要素を含んできます。このタイプの微分不等式を満たす解の研究の重要性の認識は古くはガウスやリーマンの時代にまで遡るといいます。彼等の時代から 20 世紀の前半位までは、多分にどんな幾何学的対象がこうした微分不等式を満たすかが問題になってきたように思われます。しかし 20 世紀後半からは実際にこうした不等式を満たす解の存在、非存在、一意性を実際に解いてみせるという時代（といえますか、そうでないと論文として発表しても評価されない時代）に入ってきたようです。21 世紀の現在ではこうした解の大域的解析には確率論的な手法や関数解析的な超越的手法が複雑に絡み合って役立つことが理解されてきています。その意味では微分幾何学もいままでの守備範囲を越えて、数学的により広い領域との交流を押し進めていく必要に迫られているという気がしてなりません。しかも大切で非常に興味深い点は、どんなに問題が複雑でも上のような形に還元して考えるかぎり、極めて素朴な問題として把握し研究できる点です。はてさて、21 世紀の今、原点を含む半直線上一体どんな微積分論が展開可能なのでしょうか。

## (2) 位相幾何学

大まかに言って、空間の連続的変形によって不変な性質を調べるが位相幾何学なのですが、ホモロジー代数などの代数的手段を用いて調べるのが「代数的位相幾何」で、多様体（多次元曲面）をベクトル場や特性類を用いて調べるのが「微分位相幾何」です。結び目からんで、物理などに関係してきた「低次元多様体」の分野も重要です。ここでは、代数的位相幾何のホモトピー論という分野に限って、簡単な紹介をしたいと思います。位相幾何では、あらゆる「図形」が研究の対象です。（「図形」とは大学 2 年で学ぶ「位相空間」のことです。）「図形」 $X$  から「図形」 $Y$  への連続的な対応を連続写像といい  $f : X \rightarrow Y$  と書きます。数  $n$  で逆関数が登場するように、「図形」の間の写像  $f$  も  $1 : 1$ , 上への対応であれば逆対応が考えられます。逆対応も連続であるとき、 $f$  は同相写像（「図形」の連続変形）といい、 $X$  と  $Y$  は同相である（「連続変形で同じ」といいます。ベクトルの考え方を用いれば、高校生でも「平面上のいかなる二つの三角形

も同相である」ことが証明できるでしょう。同じように「平面上の円盤は三角形と同相である」も証明できるかもしれません。 二つの「図形」は同相であれば（どんなに歪んでいても）同じだと考えますが、実はもっとゆるい「同じ」を考えたいのです。連続写像  $f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow X$  が与えられたとき、 $f$  と  $g$  は逆写像ではなくても閉区間  $[0, 1]$  を動く  $t$  をパラメータとする「写像の連続変形」の意味で互いに逆であれば、 $X$  と  $Y$  は「ホモトピー同値」といいます。このとき  $X$  と  $Y$  は形が「よく似て」います。もちろん、「 $X$  と  $Y$  は同相ならばホモトピー同値」ですが、逆は真ではありません。「ひとつだけ穴のあいた円盤と、円周はホモトピー同値」です。パラメータを使って、だんだんに穴を大きくして行って、円周にまで広げればいいのです。また「円盤は一点とホモトピー同値」です。正確な定義を与えれば、高校生でもベクトルの考え方をういて証明できるでしょう。ホモトピー同値を「同じ」と考えて、あらゆる図形を分類するのがホモトピー論とよばれる研究分野です。 写像  $f : X \rightarrow Y$  がホモトピー群（群は大学2年で学びます）とよばれる代数的な不変量の同型を導くとき、弱ホモトピー同値といえます。ホモトピー同値より弱い概念ですが、二つの概念の差は非常に微妙です。この弱ホモトピー同値を「同じ」と考えれば「どんな「図形」も、いろんな次元の有限または無限個の三角形を、そのへりを糊しろとして張りつけた「図形」と、弱ホモトピー同値の意味で同じになる」ことが示されます。ここで0次元三角形 = 点、1次元三角形 = 線分、2次元三角形 = 三角形、3次元三角形 = 四面体 …、です。この定理は、「あらゆる前層は、表現可能な前層の余極限である」というカテゴリー論の定理の幾何学的表現になっていて、「図形」を位相空間ではなく、もっと抽象的な存在として考えた方がいいかもしれないことを示唆しています。  $X$  から  $Y$  への基点を保つ連続写像全体の、連続変形の類（基点つきホモトピー類）の集合を  $[X, Y]$  と書き基点つきホモトピー集合といえます。この集合の正体を知ることも重要な研究課題です。この集合は、 $X$  または  $Y$  に特別なものをとると群になることが多いのです。 $X$  のところに  $n$  次元球面をとったものを「図形」 $Y$  の  $n$  次元ホモトピー群といえます（先ほど弱ホモトピー同値のところでも登場しました）。特に  $n = 1$  のときには基本群ともよばれ、幾何学的不変量として代数的位相幾何の範囲を飛び越して、他の様々な数学の分野に登場する重要な概念なのです。また  $Y$  に無限ループ空間をとると  $X$  のコホモロジー群をはじめ、様々な一般コホモロジー群とよばれるものが出てきます。これらの代数的な不変量を通して「図形」を研究するのです。 圏論的な整理が進み、ホモト

ピーの概念を公理化して必ずしも「図形」ではない数学的对象にホモトピー論を持ちこむというようなこともできるようになってきました。代数的位相幾何学は、圏論を基礎に幾何学に代数学の手法を用いて発展してきましたが、幾何学の範囲を越えてまだ動き続けています。

#### [4] 応用数学

応用数学は、例えていえば人間生活や社会、自然界の仕組みを説明、解析する数学的手法を開発、適用する学問と言えます。従いまして、数学そのものの抽象化よりも、むしろ、問題にしている現象を最も大切なものとして捉え、それを数学として明解、厳密に分析したり最適化することが、応用数学の役割と言えます。広い分野ですが、本学科に関連の深い研究分野には「計画数学」、「オペレーションズリサーチ」、「数理統計学」、「離散数学」などがあります。

##### (1) 計画数学

計画数学とは一般に、システムの計画と運用に関する諸問題を数学的な方法を用いて解析し、(部分的な最適化ではなく)システム全体を最適化するために有用な情報を提供する科学的方法をいいます。科学的方法であるということは、断片的に適用したり、時々用いたりというのではなく、いろいろな問題に対して適用が可能であり、教育によって伝達することが可能な方法です。計画数学が対象とするシステムには様々なパラメーターが含まれており、それらには、制御可能なものと、制御不可能なものがあります。また、確定的に決定できるものと、確率的にしか把握できないものがあります。計画数学は第二次大戦後、飛躍的な発展をとげました。その背景には、企業経営に対する競争的な圧力や規模の拡大に伴う効率の向上への指向があり、また手段としてのコンピューターの発達があります。計画数学の典型的な手法には次のようなものがあります。

1. 線形計画法 多くの一次式(または一次不等式)の条件を満たし、一次式で表される目的を表す数式(目的関数といいます)を、最小または最大にするような計画を決める方法を線形計画法といいます。線形計画法はシンプレックス法と呼ばれる手法が考案され、体系としてつくりあげられました。また、コンピューターの急速な発展と普及の結果、現実の問題への適用例が急増しました。

2. ゲーム理論 ゲーム理論は利害の一致しない複数の意思決定主体(プレイヤーといいます)が存在する状況において、各プレイヤーがいかに行動するかを数学的に分析する理論です。このような状況では、各プレイヤーの取る様々な行動によって様々な結果が生じます。つまり、ある

プレイヤーが自分自身にとって好ましい結果を目指して行動しても、他のプレイヤーの行動によっては好ましくない結果をもたらすかもしれません。ここに、プレイヤー間の競争的状況が生じます。また、状況によってはプレイヤー間の利害が一致する場合もあり、このような場合には、全てのプレイヤー、あるいはその一部分が協力して行動する協力的状況も生じえます。ゲーム理論はこのような様々な状況における各プレイヤーの合理的行動を数学的に解析するものです。そして、ゲームは経済学、政治学さらに、生物学などにも広く応用されています。なお、1994年にノーベル経済学賞を得たジョン・ナッシュ、ジョン・ハーサニー および ラインハルト・ゼルテン また、2005年にノーベル経済学賞を得た ロバート・オーマン および トーマス・シェリング はいずれもゲーム理論の研究者です。

3. 動的計画法 動的計画法はある時点の決定が次の時点の状態に影響し、この決定がさらに次の時点の状態に影響を及ぼすというとき、これら多くの時点にまたがる決定を合理的に行う手法です。このようにある決定がなされ、その結果としてある状態が生じるということを次々に繰り返していくことは現実には多く見られます。大型の計算機を使用することが容易になって煮たため応用分野は拡大しています。

## (2) 数理統計学

自然現象でも社会現象でも、多かれ少なかれ不規則性がともないます。明日の天気、為替レートの変動、台風の上陸回数、新製品の売上高など、例をあげたら尽きることがありません。このような不規則な現象について知りたいときには、観測や実験などを行ってデータを取り、そのデータに基づいて何かを考察します。これを「データ解析」または「統計解析」といい、その基礎となる理論体系を統計学といいます。とくに数学を使って研究を進める統計学のことを数理統計学と呼びます。普通、データは、整数や実数などの数であることが多いのですが、ベクトルであったり、関数であったり、群の要素や多様体上の点であることもあります。そして、データが存在している空間のことを標本空間と呼びます。上にあげたような実際的な不規則性は、さいころや硬貨を投げる実験や箱から玉を取り出す実験などとは異なり、どのような不規則性を持っているかということ自体を検討する必要があります。また、必要ならこの段階で統計的シミュレーションなどを行って、標本空間上に、観測値が従うと想定される確率分布を構成します。この作業を統計的モデリングと呼びますが、この作業では、今観測している不規則な現象の何が分かって

いて何が分かっていないのか、言い換えれば、不規則な現象のどの部分を知りたいのかということをはっきりと定めます。そして、知りたいこと（分からないこと）をパラメータを使って表現します。たとえば、「観測値は未知の平均値  $\mu$ 、既知の分散  $1$  の正規分布に従う」というようなことを想定するわけです。ここで、 $\mu$  が知りたいパラメータとなっています。このようにして出来上がった確率分布はパラメータを含んでいますので、1つの確率分布ではなく確率分布の集まり（確率分布族）になっています。我々が調べたい不規則な現象に対して、「パラメータを使って表現された知りたいもの」と観測値の従う確率分布族の関係（統計的モデル）が与えられると、実際に何をやるのかということを決めます。たとえば、未知のパラメータの値を観測値に基づいて言い当てたい（統計的推定）とか、未知のパラメータの値がある決められた値（たとえば  $1$ ）に等しいかどうかを観測値に基づいて判断したい（統計的検定）とか、まだ観測していない次の観測値の値を今までの観測値に基づいて予測したい（統計的予測）ということなどです。このような、観測値に基づく行動を統計的推測と呼びます。そして、そうするためには、観測値の関数（統計量と呼びます）をどのように構成すれば良いかということが問題になります。ここからは実際に統計量の良さの基準を数学的に仮定して、リスクと呼ばれる量を考慮しながら統計量を作っていきます。リスクの計算などのためには、統計量の確率分布（標本分布）を計算する必要がありますので、標本分布の研究（統計的分布論）も行われています。有限個の未知パラメータを含む統計的モデルをパラメトリックモデルと呼びますが、無限個の未知パラメータをもつモデル（ノンパラメトリック・モデルやセミ・パラメトリック・モデル）もよく用いられます。以上述べてきたことが、数理統計学の大まかな説明です。最後に、補足を少し述べておきます。さきほど、さまざまな標本空間（データが存在している場所）があると言いましたが、とくに、データがベクトルになっているとき、多変量データと呼ばれます。また、データは複数回取られることが多いのですが、その確率分布が、取られた時刻に依存する場合には、そのデータは時系列データと呼ばれます。そしてそのようなデータの解析を中心に研究する分野を多変量解析とか時系列解析と呼ぶことがあります。最近では、計算機の発達により、大量のデータを扱うことができるようになったため、統計的モデルも、複雑で実際的なものが使われるようになってきました。そのため、数値計算や統計的シミュレーションは言うに及ばず、リスクや尤度（ゆうど）の式の計算にも計算機が使われ

たり（数式処理，computer algebra）しています。また，統計的モデリングによって確率分布族を定める段階で1つの確率分布族に絞ることが出来ない場合に，複数の統計的モデルを同時に想定して，観測値に基づいてモデルを選ぶこと（統計的モデル選択）もよく行われます。